10. Euler, síkbarajzolhatóság

# Euler

**Def**: A G gráf Euler-(kör)sétája a G egy olyan (kör)sétája, ami G minden élét tartalmazza.

1. **Ha a G irányított gráfnak van Euler-körsétája,** 
   1. akkor G izolált pontoktól eltekintve gyengén összefüggő, és
      1. Ha G két különböző gyenge komponense is tartalmaz élt, akkor G-nek nem lehet Euler-körsétája, hisz egyetlen séta sem tartalmazhat élt két különböző gyenge komponensből.
   2. ρ(v) = δ(v) minden v csúcsára.
      1. Ha végighaladunk az Euler-körsétán, akkor pontosan annyiszor lépünk be a v csúcsba ill. ki a v csúcsból, ahányszor áthalad a körséta a v csúcson. Mivel a körséta G minden élét pontosan egyszer érinti, ezért ρ(v) = δ(v).
2. **Ha a G irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája, akkor**
   1. G izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és
      1. Egy (kör)séta nem tartalmazhatja két különböző komponensnek is egy-egy élét
   2. G-ben minden fokszám páros.
      1. az Euler-körsétát követve tetszőleges v csúcsba ugyanannyiszor lépünk be, mint ahányszor kilépünk belőle. Ezért d(v) páros
3. **Ha a G irányítatlan gráfnak van Euler-sétája, akkor**
   1. G izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és
   2. G-nek 0 vagy 2 páratlan fokú csúcsa van.
      1. Tfh G Euler-sétája egy uv-séta. Ekkor minden w != u, v csúcsra d(w) kétszer annyi, mint ahányszor az Euler-séta w-n áthalad, vagyis d(w) páros. Ha u = v, akkor az Euler-séta körséta, így d(u) is páros (2b) miatt. Ha pedig u 6 = v, akkor u-ból 1-gyel többször lépünk ki, mint be, v-be 1-gyel többször lépünk be, mint ki, vagyis d(u) és d(v) páratlanok.

**Lemma**: Ha G Euler-gráf, akkor G élei kiszínezhetők úgy, hogy az egyszínű élek (ir) kört alkossanak minden színre.

**Biz**: Induljunk el G egy éle mentén, és haladjunk tovább az (irányított) élek mentén. Mivel G Euler, ezért sosem akadunk el: előbb-utóbb ismétlődik egy csúcs, így találunk egy C1 kört. C1 éleit törölve G−C1 Euler-gráf marad. Ismételjük meg ezt a G−C1 gráfon. Így G minden éle előbb-utóbb sorra kerül és megkapjuk a C2, C3, . . . köröket. Ezért E(G) = C1 ∪ C2 ∪ . . . diszjunkt körök uniójára bomlik fel. Színezzük ki a Ci kör éleit az i-dik színnel. (Fent az irányítatlan esetet illusztráltuk, irányított esetben az érvelés ugyanez, az ábrákon pedig irányított élek kellenének.)

**Fordított bizonyítások**

1. (G irányított gráfnak van Euler-körsétája) ⇐(G Euler-gráf és G izolált pontoktól eltekintve gyengén öf)
   1. A Lemma miatt E(G) felbontható körökre, tehát körsétákra is. Ha a körséták száma legalább 2, akkor választunk két körsétát, amiknek van közös csúcsa és ezen csúcs mentén az alábbi ábra szerint „összevarrjuk” azokat. Mindezt addig tudjuk végezni, míg végül csak egyetlen körséta marad.
2. (G irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája) ⇐ (G Euler-gráf és G izolált pontoktól eltekintve öf)
   1. Ugyanez mint 1.1
3. (G irányítatlan gráfnak van Euler-sétája) ⇐(G izolált pontoktól eltekintve öf és 0 vagy 2 ptn fokú csúcsa van.)
   1. Ha G Euler-gráf, akkor (2) miatt van Euler-körsétája, ami Euler-séta is egyúttal. Ha G nem Euler-gráf, akkor legyenek u és v a G ptn fokú csúcsai. Ekkor G + uv Euler-gráf, és (2) miatt van Euler-körsétája. Feltehető, hogy ezen körséta utolsó éle uv. Ezt az uv élt elhagyva a körsétából, G Euler-sétáját kapjuk.

# Síkbarajzolhatóság